

SSOL EE4 AL 2025-0

Algebra Lineal (Universidad de Lima)



UNIVERSIDAD DE LIMA

PROGRAMA DE ESTUDIOS GENERALES
ASIGNATURA: Álgebra Lineal
CICLO: 2025-0
TIEMPO: 90 minutos

SOLUCIÓN DEL EXAMEN ESCRITO N°4

---

1. (3P) Esta pregunta consta de tres partes independientes.
   Responda los siguientes ítems justificando sus respuestas:

a) (1P) Sea la matriz simétrica A y la ecuación matricial $\left(A\,B^t - I^3\right)^t = [0]$, donde I representa la matriz identidad. Simplifique y determine una relación entre las matrices $A\ y\ B$.

b) (1P) Dada la matriz $C = \begin{bmatrix} x-3 & x^3+1 & 2-x \\ 0 & x^2-4 & 7 \\ 0 & 0 & 1-x \end{bmatrix}$, determine los valores reales que puede tomar x de modo que la matriz C sea singular.

c) (1P) Sea A una matriz regular antisimétrica e I la matriz identidad. Halle el determinante de la matriz X, si se satisface la ecuación:

$$-I\,A^t = I\,X\left(A^{-1}I\right)^{-1}$$

Solución

a) $\left(A\,B^t - I^3\right)^t = [0]$ $BA^t - I^t = [0]$ Luego de reducir la ecuación, se obtiene $BA = I$ De donde, A es la matriz inversa de B y viceversa.	**(0,5P)** **(0,5P)**
b) Como C es una matriz triangular superior, para que C sea singular $det(C) = (x-3)(x^2-4)(1-x) = 0$ Luego, al resolver la ecuación se tiene que $x=-2, x=1, x=2, x=3$	**(0,5P)** **(0,5P)**
c) $-I\,A^t = IX\left(A^{-1}I\right)^{-1}, A = -A^t$ Al reducir, se obtiene: $X = I$ Luego, $\lvert X\rvert = \lvert I\rvert = 1$	**(0,5P)** **(0,5P)**

2. (5P) Esta pregunta tiene tres partes independientes.

a) (1,5P) La matriz A es de orden 3×3 donde:

$$a_{ij}=\begin{cases} 2i+2j, si\, i\geq j \\ 4ij, si\, i<j \end{cases}$$

i) (1P) Determine los elementos de la matriz A.

ii) (0,5P) Determine la matriz $A+4B, donde\, B=A$

Solución

i) $A=\begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 6 & 8 & 24 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$	**(1P)**
ii) $A+4B=A+2A=3A=\begin{bmatrix} 12 & 24 & 36 \\ 18 & 24 & 72 \\ 24 & 30 & 36 \end{bmatrix}$	**(0,5P)**

b) (1,5P) Considere las matrices inversible A, simétrica B y una matriz diagonal C. Simplifique y despeje la matriz incógnita X de la siguiente ecuación matricial

$$B^t=A\left(X^t+\frac{1}{2}C\right)$$

Solución

$B^t=A\left(X^t+\frac{1}{2}C\right)\Longleftrightarrow A^{-1}B^t=X^t+\frac{1}{2}C$	**(0,5P)**
$\Longleftrightarrow X^t=A^{-1}B^t-\frac{1}{2}C$	**(0,5P)**
$\Longleftrightarrow X=B\left(A^{-1}\right)^t-\frac{1}{2}C$	**(0,5P)**

c) (2P) Dadas las matrices regulares

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} y\, C=\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcule la matriz X a partir de la ecuación matricial: $AXB=C$

Solución

$AXB=C\Longleftrightarrow A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$	**(0,5P)**

$\Longleftrightarrow X = A^{-1} C B^{-1}$	**(0,5P)**
$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$	**(0,5P)**
$X = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$	
$X = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$	**(0,5P)**

3. (4P) **Producción de Ropa:** Una empresa confecciona dos tipos de prendas de vestir: camisetas y pantalones. Para su producción, se necesitan tres tipos de materiales: ovillos de hilo de algodón, ovillos de hilo de poliéster y botones. La empresa tiene dos líneas de producción: **Línea A** y **Línea B**, que utilizan cantidades diferentes de materiales para cada tipo de ropa.

   Según los datos proporcionados por la administración de la empresa, las cantidades diarias de cada material necesarias para cada tipo de ropa en las dos líneas de producción se detallan a continuación, siendo la cantidad de algodón en la **Línea B** un 10% menor que en la **Línea A**.

   Línea A:

Ropa	**Algodón** (¿*de ovillos*)	**Poliéster** (¿*de ovillos*)	**Botones (unidades)**
Camisetas	30	20	300
Pantalones	20	30	500

   Línea B:

Ropa	**Algodón** (¿*de ovillos*)	**Poliéster** (¿*de ovillos*)	**Botones (unidades)**
Camisetas		15	200
Pantalones		25	400

   La empresa tiene dos proveedores para estos materiales, siendo el precio del poliéster el 70% del precio del algodón. A continuación, se detallan los precios:

Material	**Proveedor 1** (soles por unidad)	**Proveedor 2** (soles por unidad)
Algodón	8	7,5

Poliéster		
Botones	0,8	0,9

La empresa decide calcular el total de materiales requeridos para un mes, sabiendo que la **Línea A** opera 20 días y la **Línea B** opera 15 días durante un mes.

a) (1P) Construya dos matrices A y B de orden 2×3, donde A represente las cantidades diarias de materiales en la **Línea A** y B represente las cantidades diarias de materiales en la **Línea B** para un día de producción.

Solución

AL = $Algodón(unidades)$, **Pol =** $Poliéster(unidades)$, $Bo = Botones(unidades)$ $$\underbrace{A=\overset{\begin{matrix}Al & Pol & Bo\end{matrix}}{\begin{bmatrix}30 & 20 & 300\\ 20 & 30 & 500\end{bmatrix}}\begin{matrix}Camisetas\\ Pantalones\end{matrix}}_{(0{,}5P)};\ \underbrace{B=\overset{\begin{matrix}Al & Pol & Bo\end{matrix}}{\begin{bmatrix}27 & 15 & 200\\ 18 & 25 & 400\end{bmatrix}}\begin{matrix}Camisetas\\ Pantalones\end{matrix}}_{(0{,}5P)}$$	**(1P)**

b) (1P) Calcule la matriz T que representa los requerimientos de materiales totales durante un mes.

Solución

$$T=20A+15B=20\begin{bmatrix}30 & 20 & 300\\ 20 & 30 & 500\end{bmatrix}+15\begin{bmatrix}27 & 15 & 200\\ 18 & 25 & 400\end{bmatrix}$$	**(0,5P)**
$$T=\overset{\begin{matrix}Al & Pol & Bo\end{matrix}}{\begin{bmatrix}1005 & 625 & 9000\\ 670 & 975 & 16000\end{bmatrix}}\begin{matrix}Camisetas\\ Pantalones\end{matrix}$$	**(0,5P)**

c) (0,5P) Construya una matriz Q de orden 3×2 para organizar los precios de cada material según cada proveedor.

Solución

$P1 = Precio\ del\ Proveedor\ 1$ $P2 = Precio\ del\ Proveedor\ 2$ $$Q=\overset{\begin{matrix}P1 & P2\end{matrix}}{\begin{bmatrix}8 & 7.5\\ 5{,}6 & 5{,}25\\ 0{,}8 & 0{,}9\end{bmatrix}}\begin{matrix}Algodón\\ Poliéster\\ Botones\end{matrix}$$	**(0,5P)**

d) (1,5P) Determine la matriz G que representa los gastos totales de la empresa en un mes, considerando los precios de cada material con ambos proveedores. Además, a partir de la matriz G, determine qué proveedor recauda un mayor ingreso al vender los materiales para la empresa.

Solución

$P1 = Proveedor\,1, P2 = Proveedor\,2$ $$G = \begin{bmatrix} 1005 & 625 & 9000 \\ 670 & 975 & 16000 \end{bmatrix} \overset{\quad P1 \quad P2}{\begin{bmatrix} 8 & 7.5 \\ 5{,}6 & 5{,}25 \\ 0{,}8 & 0{,}9 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 18\,740 & 18\,918{,}75 \\ 23\,620 & 24\,543{,}75 \end{bmatrix} \begin{matrix} soles\,en\,Camisetas \\ soles\,en\,Pantalones \end{matrix}$$	**(1P)**
Cobro por cada proveedor: El proveedor 1 cobra en total 42 360 soles. El proveedor 2 cobra en total 43 462,50 soles. Por lo tanto, el proveedor 2 obtiene una mayor recaudación al vender sus productos a la empresa.	**(0,5P)**

4. (5P) Esta pregunta consta de dos partes independientes.

a) (3,5P) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, utilice el método de Gauss-Jordan para determinar la matriz inversa de A.

b) (1,5P) Sean las matrices regulares $B, M\ y\ X$. Si se tiene la siguiente ecuación matricial:

$$X^{-1}M = \left(M B^{-1}\right)^{-1} + (M - B) M^{-1} - 4I$$

donde se sabe que I representa la matriz identidad, simplifique y despeje la matriz incógnita X.

Solución

a)

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc\|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\cong}{-f_1} \left[\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$	**(0,5P)**
$$\begin{matrix} f_2 - 4f_1 \\ \cong \\ f_3 - 2f_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$	**(0,5P)** por cada trasformación por filas. (**máximo 2,5P**)

<table>
<tr>
<td>

$$\underset{\cong}{f_2-4f_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & -4\\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c}f_3+2f_2\\ \cong\\ f_1-2f_2\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 7 & -2 & 8\\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & -4\\ 0 & 0 & -1 & -6 & 2 & -7\end{array}\right]$$

$$\underset{\cong}{f_1+f_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & -4\\ 0 & 0 & -1 & -6 & 2 & -7\end{array}\right]\underset{\cong}{-f_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 7\end{array}\right]$$

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

Por lo tanto,

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -4 & 1 & -4\\ 6 & -2 & 7\end{bmatrix}$$

</td>
<td>(0,5P)</td>
</tr>
<tr>
<td>

b) Se tiene

$$X^{-1}M=\left(MB^{-1}\right)^{-1}+(M-B)M^{-1}-4I$$

$$X^{-1}M=BM^{-1}+I-BM^{-1}-4I$$

$$X^{-1}M=-3I\Rightarrow X^{-1}=-3M^{-1}$$

$$X=\frac{-1}{3}M$$

</td>
<td>(0,5P)

(0,5P)

(0,5P)</td>
</tr>
</table>

5. (3P) Halle los valores de x, para los cuales la matriz B no tenga inversa

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ -2 & x-3 & 9 & -7\\ 1 & 2x+4 & x+8 & 5\\ 3 & 6 & x-6 & x+11\end{bmatrix}$$

Solución

<table>
<tr>
<td>

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ -2 & x-3 & 9 & -7\\ 1 & 2x+4 & x+8 & 5\\ 3 & 6 & x-6 & x+11\end{vmatrix}\begin{array}{c}f_2+2f_1\\ f_3+(-f_1)\\ f_4+(-3)f_1\end{array}$$

</td>
<td>

(1P) por la 1ra columna

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

$$¿\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & x+1 & 5 & -1 \\ 0 & 2x+2 & x+10 & 2 \\ 0 & 0 & x & x+2 \end{vmatrix} f_3+(-2)f_2$$

$$¿\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & x+1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & x & 4 \\ 0 & 0 & x & x+2 \end{vmatrix} f_4+(-1)f_3$$

$$¿\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & x+1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & x & 4 \\ 0 & 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} f_4+(-1)f_3$$

$$|B|=(1)(x+1)(x)(x-2)$$

Luego, los valores de x para los cuales la matriz B no tiene inversa son aquellos donde $|B|=0$, es decir:

$$x=-1\,, x=0\ y\ x=2$$

</td>
<td>

(0,5P) si comete un error
(0,5P) por procedimiento adecuado
(0,5P) por procedimiento adecuado

(0,5P) por el determinante

(0,5P) por los valores de x

</td>
</tr>
</table>

Nota: Se penalizará con 0,5P por no utilizar la notación matemática apropiada.